Anhang B

Von der Wertetabelle zur Berechnungsformel

Von der Funktion $y = f(x)$ kenne man keine Berechnungsformel, sondern nur eine emipirisch gewonnene Wertetabelle[1] mit n Wertepaaren (x_i, y_i), $(i = 1, \ldots, n)$. In etlichen Fällen kann man aus der Wertetabelle eine zugehörige Berechnungsformel für $y = f(x)$ gewinnen. Die gängigsten im vorliegenden Skript behandelten Fälle sind im Folgenden noch einmal zusammenfassend dargestellt.

6 Typen von Funktionen, für die sich aus einer Wertetabelle nach geeigneten graphischen Tests mittels Linearer Regression eine optimale Berechnungsformel bestimmen lässt:

drei Typen von elementaren Funktionen:

- Typ(1) Proportionalität $y = C \cdot x$ (= Spezialfall von Typ(6) mit $b = 1$)
- Typ(2) Geradengleichung $y = A + B \cdot x$
- Typ(3) Antiproportionalität $y = c \cdot \frac{1}{x}$ (= Spezialfall von Typ(6) mit $b = -1$)

und drei Typen von nichtelementaren Funktionen:

- Typ(4) Allgemeine Exponentialfunktion $y = y_0 \cdot e^{cx}$
- Typ(5) Allgemeine Logarithmusfunktion $y = A + B \cdot \ln x$
- Typ(6) Allgemeine Potenzfunktion $y = a \cdot x^b$.

Verfahren zur Formelgewinnung:
Wenn die Wertetabelle

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_i	$\ldots$	y_n

mit empirischen Messdaten für x und y bereits vorliegt, gewinnt man daraus (wenn es möglich ist!), die zu den Daten optimal passende Berechnungsformel für y als Funktion von x in folgenden Schritten:

[1] Es sind mindestens (!) $\mathbf{n \geq 3}$ Wertepaare erforderlich. Je größer die Anzahl n der Wertepaare, umso besser.

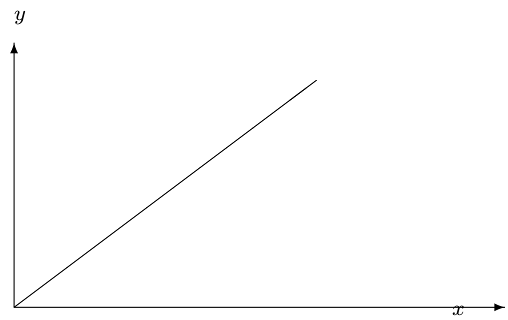
1. Schritt: Aus der Wertetabelle erstellt man den Graphen der Punkte $(x_i|y_i)$ in einem normalen, äquidistanten Koordinatensystem (kein halb- oder doppeltlogarithmisches Papier verwenden).

2. Schritt: Den entstandenen Graphen vergleicht man mit allen im nachfolgenden Katalog aufgeführten typischen Graphen. Jeder dieser Graphen gehört zu einem bestimmten der 6 Funktionentypen. Man entscheidet, welchem dieser typischen Graphen der eigene am ähnlichsten sieht. So gewinnt man eine Hypothese, um welchen der 6 Funktionentypen es sich bei der eigenen Funktion handeln könnte.

Katalog von typischen Graphen:

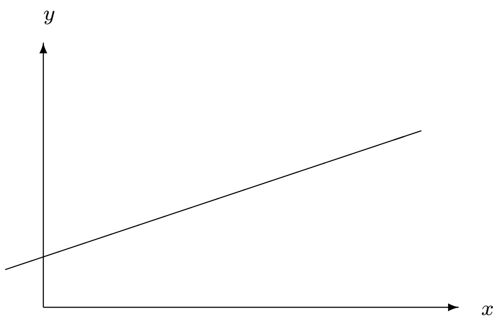
<u>1. Fall:</u> Die Punkte $(x_i|y_i)$ liegen ungefähr auf einer Geraden:

Fall 1A: Verlauf durch den Ursprung



Ursprungsgerade $y = C \cdot x$
Berechne C mit Linearer Regression
(1-Schritt-Verfahren)

Fall 1B: Verlauf nicht durch den Ursprung

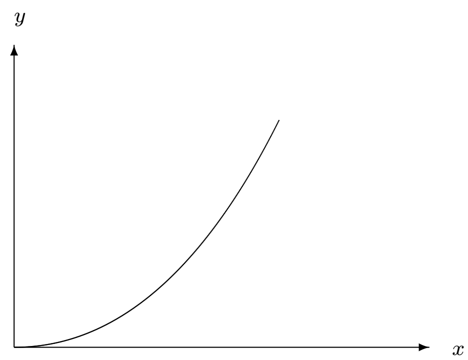


Gerade in allgemeiner Lage $y = A + B \cdot x$
Berechne $A,\ B$ mit Linearer Regression
(3-Schritt-Verfahren)

Zur Unterscheidung hilft manchmal nur die fachwissenschaftliche Frage: Sollte $y = 0$ oder $y > 0$ sein, wenn $x = 0$?

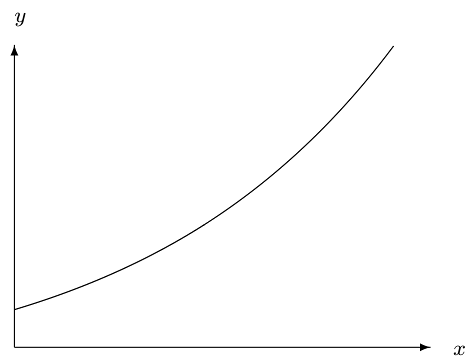
<u>2. Fall:</u> Ansteigender Bogen, immer steiler steigend:

Fall 2A: Verlauf durch den Ursprung



Tangente bei $x = 0$ horizontal
Verdacht auf Typ(6) (weiter S.215)
(=allgemeine Potenzfunktion)
$y = a \cdot x^b \quad$ mit $b > 1$

Fall 2B: Schnittpunkt mit der y-Achse

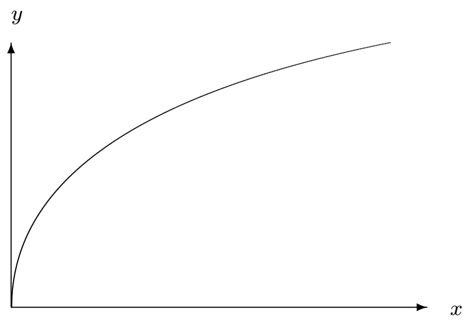


Tangente bei $x = 0$ steigend
Verdacht auf Typ(4) (weiter S.215)
(=allgemeine Exponentialfunktion)
$y = y_0 \cdot \exp(cx) \quad$ mit $c > 0$

Manchmal hilft eine fachwissenschaftliche Frage: Sollte $y = 0$ oder $y > 0$ sein, wenn $x = 0$?

<u>3. Fall:</u> Ansteigender Bogen, immer schwächer, aber unbegrenzt steigend:

Fall 3A: Verlauf durch den Ursprung



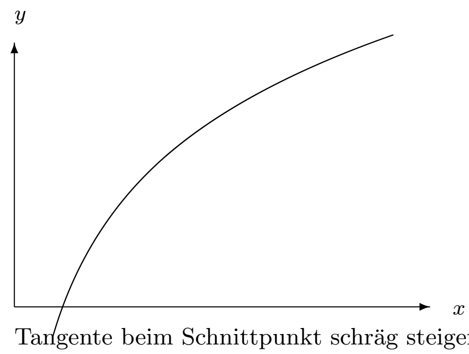
Tangente bei $x = 0$ senkrecht

Verdacht auf Typ(6) (weiter S.215)

(=allgemeine Potenzfunktion)

$y = a \cdot x^b$ mit $0 < b < 1$

Fall 3B: Schnittpunkt mit der x-Achse



Tangente beim Schnittpunkt schräg steigend

Verdacht auf Typ(5) (weiter S.215)

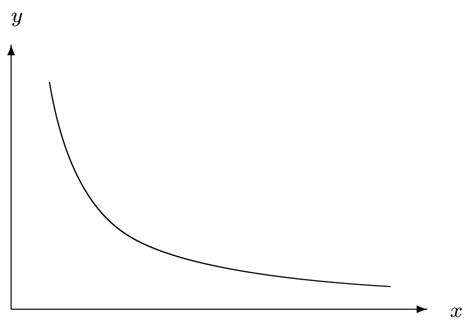
(=allgemeine Logarithmusfunktion)

$y = c + \log_a x$ mit $a > 1$

Manchmal hilft eine fachwissenschaftliche Frage: Sollte $y = 0$ sein, wenn $x = 0$, oder ist der Fall $x = 0$ sinnlos?

<u>4. Fall:</u> Abfallender Bogen, immer flacher fallend, asymptotisch gegen die x-Achse strebend:

Fall 4A: Schnittpunkt mit keiner Achse



Verdacht auf Typ(6) (weiter S.215)

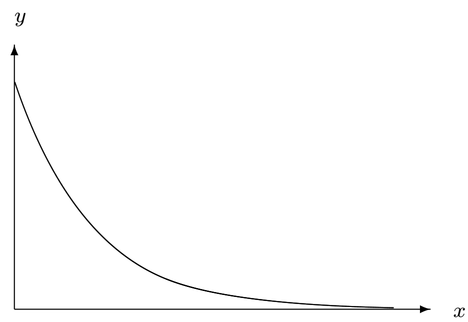
(=allgemeine Potenzfunktion)

$y = a \cdot x^b$ mit $b < 0$

oder spezieller auf Typ(2) (weiter S.215)

(Antiproportionalität) $y = c \cdot \frac{1}{x}$

Fall 4B: Schnittpunkt mit der y-Achse



Verdacht auf Typ(4) (weiter S.215)

(=allgemeine Exponentialfunktion)

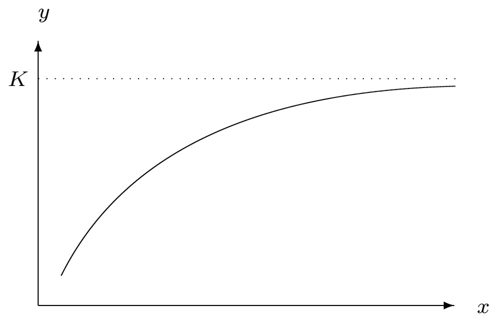
$y = y_0 \cdot \exp(cx)$ mit $c < 0$

Manchmal hilft eine fachwissenschaftliche Frage: Sollte y einen Wert haben, wenn $x = 0$ ist, oder ist der Fall $x = 0$ sinnlos?

Hiermit sind schon die am häufigsten vorkommenden Standardfälle behandelt.

Die nächsten beiden Fälle sind leicht mit den Fällen 3 und 4 zu verwechseln und kommen in Frage, wenn diese nicht zutreffen. Beispiele dazu sind alle Variablen y, die sich als Funktion der Zeit t nach dem Schema "prozentuale Abnahme kontra konstante Zufuhr" verändern, denn sie streben für $t \to \infty$ asymptotisch gegen eine positive Konstante ("dynamisches Gleichgewicht").[2]

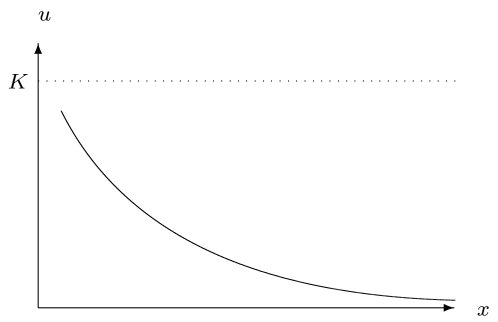
<u>5. Fall:</u> Ansteigender Bogen, immer flacher steigend, asymptotisch konstant = K:



Dieser Fall ist rein optisch kaum von den Fällen 3A und 3B unterscheidbar. Existenz und Zahlwert der Asymptote $y = K$ muss aus anderer (fachwissenschaftlicher) Quelle bekannt sein. Wenn dies der Fall ist:
Erweitere die Wertetabelle um eine Rubrik für die Variable

$$u = K - y$$

und skizziere den Graphen der Punkte $(x|u)$:



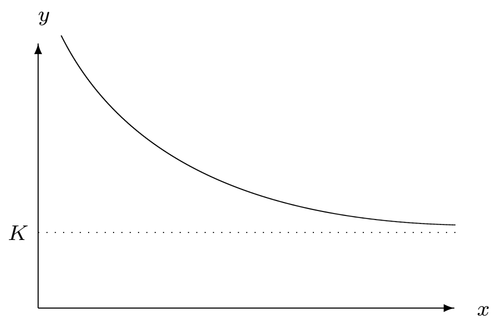
Der Graph der Punkte $(x|u)$ ist dann immer flacher fallend und strebt asymptotisch gegen die x-Achse. Klassifiziere diesen Graphen unter Fall 4A oder 4B und arbeite weiter, bis eine Berechnungsformel

$$u = g(x)$$

gefunden worden ist. Durch Rücksubstitution folgt $K - y = g(x)$ und daraus die gesuchte Formel für y als Funktion von x:

$$y = K - g(x).$$

<u>6. Fall:</u> Graph immer flacher fallend, asymptotisch konstante =K (mit K$\neq 0$):

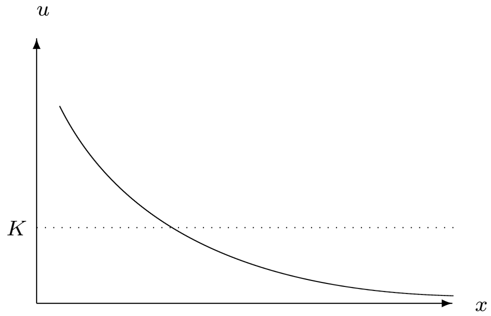


Dieser Fall ist rein optisch kaum von den Fällen 4A und 4B unterscheidbar. Existenz und Zahlwert der Asymptote $y = K$ muss aus anderer (fachwissenschaftlicher) Quelle bekannt sein. Wenn dies der Fall ist:
Erweitere die Wertetabelle um eine Rubrik für die Variable

$$u = y - K$$

und skizziere den Graphen der Punkte $(x|u)$:

[2] siehe 3.3.4 und 3.3.5, S.37 ff



Der Graph der Punkte $(x|u)$ ist dann immer flacher fallend und strebt asymptotisch gegen die x-Achse. Klassifiziere diesen Graphen unter Fall 4A oder 4B und arbeite weiter, bis eine Berechnungsformel

$$u = g(x)$$

gefunden worden ist. Durch Rücksubstitution folgt $y - K = g(x)$ und daraus die gesuchte Formel für y als Funktion von x:

$$y = K + g(x).$$

Nach Durchsicht dieses Katalogs hat man eine Vermutung, welchem Typ (n) $(n = 1, \ldots, 6)$ aus diesem Katalog der eigene Graph am ähnlichsten ist.

3. Schritt: Diese Hypothese muss nun durch einen graphischen Test überprüft werden. Für jeden der 6 Funktionentypen gibt es einen eigenen graphischen Test (s.u., S.215f), wobei aber die elementaren Tests auf Proportionalität (Typ (1)) und auf Antiproportionalität (Typ (3)) sich durch den - umfassenderen - Test auf allgemeine Potenzfunktion (Typ (6)) ersetzen lassen.
Jeder dieser Tests funktioniert so, dass er überprüft, ob gewisse Punkte (ungefähr) auf einer Geraden liegen. Das muss mittels **Linealtest** (siehe3.1.5, S.23) entschieden werden.
Falls der Test negativ verlief, so ist definitiv festgestellt, dass die Funktion nicht dem Typ (n) angehört. Man kann dann anhand des Katalogs von Graphen vielleicht noch eine andere Hypothese aufstellen und durch einen entsprechenden anderen graphischen Test auch diese überprüfen.

Merke: Eine sorgfältige Zeichnung des eigenen Graphen und eine gründliche Sichtung des Katalogs sind für die Auswahl eines auf Anhieb Erfolg versprechenden Tests entscheidend wichtig.
Eventuell muss man den eigenen Graphen an den Enden des Bogens vorsichtig so verlängern, dass sich besser einschätzen lässt, ob er wohl durch den Ursprung verläuft (Typ (6) mit $b > 0$) oder die positive y-Achse trifft (Typ (4)) oder diese Achse als Asymptote besitzt (Typ (6) mit $b < 0$) oder die x-Achse schneidet (Typ (5)).

4. Schritt: Falls ein im 3. Schritt durchgeführter graphischer Test auf Typ (n) erfolgreich verlaufen ist, gewisse Punkte also auf einer Geraden liegen, steht definitiv fest, dass eine Berechnungsformel vom Typ (n) für die Funktion existiert. Man muss nur noch die Konstanten in dieser Formel bestimmen. Dazu müssen zunächst als Vorarbeit die Konstanten in der Geradengleichung errechnet werden (optimal mit Linearer Regression, für Eilige mittels zweier Wertepaare).

5. Schritt: Aus den Konstanten der Geradengleichung kann man jeweils durch geeignete Umrechnung die Konstanten in der Berechnungsformel ermitteln und diese somit fertigstellen.

6. Schritt: Da das Fehlerrisiko bei diesem langwierigen Verfahren nicht unerheblich ist, muss unbedingt die Probe gemacht werden: Für die x-Werte in der Tabelle rechnet man die zugehörigen y-Werte mit der selbstgefundenen Formel aus und trägt sie in eine zusätzliche Tabellenrubrik ein. Danach kann man sie mit den ursprünglichen y-Werten aus der Tabelle vergleichen.
Achtung: Da nicht eine einzelne berechnete Zahl auf Korrektheit überprüft werden soll, sondern eine ganze Funktionsformel, genügt es nicht, eine einzelne Stichprobe zu machen: Es kann z.B. vorkommen, dass die Formel mit den y-Werten am Tabellenanfang gut harmoniert, mit den nachfolgenden Werten aber nicht.

Im 2. Schritt hat man eine Hypothese aufgestellt, zu welchem Funktionstyp (n) die eigene Funktion gehört. Je nach Wert von (n) verläuft die praktische Durchführung aller weiteren Schritte unterschiedlich. Nachfolgend

Die konkrete Durchführung der Schritte 3 bis 6, je nach Typ (n):

Die elementaren Funktionstypen:

Typ (1)	**Proportionalität**	Formel: $y = C \cdot x$.	Gesucht: Wert von C.
3. Schritt:	Graphischer Test:	Liegen die Punkte $(x \mid y)$ auf einer Ursprungsgeraden?	
		Nur, wenn ja (Linealtest!), weiter wie folgt:	
4. Schritt:	Lineare Regression:	Berechne C (1-Schritt-Verfahren)	
5. Schritt:	entfällt		
6. Schritt:	Probe: Berechne $y_i = C \cdot x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und vergleiche mit Tabellenwerten		

Typ (2)	**Allg. Geradengleichung**	Formel: $y = A + B \cdot x$.	Gesucht: Wert von A und B.
3. Schritt:	Graphischer Test:	Liegen die Punkte $(x \mid y)$ auf einer Geraden?	
		Nur, wenn ja (Linealtest!), weiter wie folgt:	
4. Schritt:	Lineare Regression:	Setze $v \hat{=} x$, $w \hat{=} y$	
		Berechne B, dann A (3-Schritt-Verfahren)	
5. Schritt:	entfällt		
6. Schritt:	Probe: Berechne $y_i = A + B \cdot x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und vergleiche mit Tabellenwerten		

Typ (3)	**Antiproportionalität**	Formel: $y = c \cdot \frac{1}{x}$.	Gesucht: Wert von c.
3. Schritt:	Graphischer Test:	Erstelle Wertetabelle für $\frac{1}{x}$	
		Liegen die Punkte $\left(\frac{1}{x} \mid y\right)$ auf einer Ursprungsgeraden?	
		Nur, wenn ja (Linealtest!), weiter wie folgt:	
4. Schritt:	Lineare Regression:	Setze $v \hat{=} 1/x$, $w \hat{=} y$	
		Berechne C (1-Schritt-Verfahren)	
5. Schritt:	Berechnung von c:	$c = C$	
6. Schritt:	Probe: Berechne $y_i = \frac{c}{x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ und vergleiche mit Tabellenwerten		

Bei den nun folgenden Testverfahren kann man halb- bzw. doppeltlogarithmisches Papier[3] erfolgreich einsetzen. Dieses gestattet, den graphischen Test (3. Schritt) schon durchzuführen, ohne die fraglichen ln-Werte überhaupt berechnet zu haben.
Falls der Test dann aber erfolgreich verläuft, der richtige Formeltyp also schon bestimmt worden ist, und die Untersuchung mit diesem theoretischen Resultat nicht beendet sein soll, dann muss die Berechnung der ln-Werte zu Beginn des 4. Schrittes doch noch erfolgen - es sei denn, man benutzt einen programmierbaren Taschenrechner, der die Lineare Regression selbsttätig durchführt, oder man errechnet die Formelkonstanten nur überschlagsweise mittels zweier Wertepaare.

Die nichtelementaren Funktionstypen:

Typ (4) Allg. Exponentialfunktion		Formel: $y = y_0 \cdot e^{cx}$. Gesucht: Wert von y_0 und c.
3. Schritt:	Graphischer Test:	Liegen die Punkte $(x \mid \ln y)$ auf einer Geraden?
		Nur, wenn ja (Linealtest!), weiter wie folgt:
4. Schritt:	Lineare Regression:	Es gilt $\ln y = A + B \cdot x$ mit unbekanntem A und B
		Erstelle Wertetabelle für $\ln y$
		Setze $v \hat{=} x$, $w \hat{=} \ln y$
		Berechne B und A (3-Schritt-Verfahren)
5. Schritt:	Berechnung von y_0 und c:	$y_0 = e^A$, $c = B$
6. Schritt:	Probe: Berechne $y_i = y_0 \cdot \exp(c \cdot x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ und vergleiche mit Tabellenwerten	

Typ (5) Allg. Logarithmusfunktion		Formel: $y = A + B \cdot \ln x$ Gesucht: Wert von A und B.
3. Schritt:	Graphischer Test:	Liegen die Punkte $(\ln x \mid y)$ auf einer Geraden?
		Nur, wenn ja (Linealtest!), weiter wie folgt:
4. Schritt:	Lineare Regression:	Es gilt $y = A + B \cdot \ln x$ mit unbekanntem A und B
		Erstelle Wertetabelle für $\ln x$
		Setze $v \hat{=} \ln x$, $w \hat{=} y$
		Berechne B und A (3-Schritt-Verfahren)
5. Schritt:	entfällt	
6. Schritt:	Probe: Berechne $y_i = A + B \cdot \ln x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und vergleiche mit Tabellenwerten	

Typ (6) Allg. Potenzfunktion		Formel: $y = a \cdot x^b$. Gesucht: Wert von a und b.
3. Schritt:	Graphischer Test:	Liegen die Punkte $(\ln x \mid \ln y)$ auf einer Geraden?
		Nur, wenn ja (Linealtest!), weiter wie folgt:
4. Schritt:	Lineare Regression	Es gilt $\ln y = A + B \cdot \ln x$ mit unbekanntem A und B
		Erstelle Wertetabelle für $\ln x$ und $\ln y$
		Setze $v \hat{=} \ln x$, $w \hat{=} \ln y$
		Berechne B und A (3-Schritt-Verfahren)
5. Schritt:	Berechnung von a und b:	$a = e^A$, $b = B$
6. Schritt:	Probe: Berechne $y_i = a \cdot x_i^b$ $(i = 1, \ldots, n)$ und vergleiche mit Tabellenwerten	

[3] siehe Anhang A, S.202ff